Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Hinweise für die Abiturientinnen und Abiturienten

Abiturprüfung **2001**

Haupttermin	**Grundkurs** M a t h e m a t i k
Bearbeitungszeit:	**240** Minuten
Hilfsmittel:	Funktionentafel mit mathematischem Formelanhang Taschenrechner (nicht programmierbar)
Hinweise:	Sie erhalten **zwei** Aufgaben.

Sie sind verpflichtet, die Ihnen vorgelegten **zwei** Aufgaben zu bearbeiten.

Verwenden Sie für die Reinschrift und den Entwurf je Aufgabe **einen neuen** Bogen.

Vermerken Sie auf **jedem Bogen** die Nummer der bearbeiteten Aufgaben.

Sie sind verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn (auf Anzahl der Blätter, Anlagen usw.) zu überprüfen.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet.

M

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2001** — Grundkurs **Mathematik** — Aufgabe **A 1**

Haupttermin — **Analysis**

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$f(x)=\frac{1}{12}(x^3-12x^2+36x)\ ;\quad x\in\mathbb{R}.$$

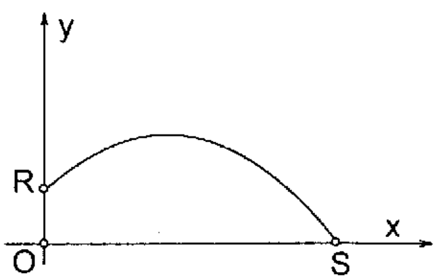
Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K für $-1\le x\le 7$ (Längeneinheit 1 cm). (8 VP)

b) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Hochpunkt $H(2\,|\,\frac{8}{3})$ bilden mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.
In welchem Verhältnis teilt K die Rechteckfläche? (7 VP)

c) An K wird im Punkt $P(u\,|\,f(u))$ mit $2<u<6$ die Tangente t_P gelegt; t_P schneidet die y-Achse in Q.
Der Ursprung O bildet mit den Punkten P und Q ein Dreieck.
Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal? (8 VP)

d) Beim Kugelstoßen wird eine Kugel im Punkt R aus einer Höhe von 1,95 m unter einem Winkel von $\alpha=42°$ bezüglich der Horizontalen abgestoßen und landet im Punkt S auf dem Boden. Als Weite werden 11,0 m gemessen.
Die Flugbahn der Kugel (siehe Skizze) kann näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion zweiten Grades beschrieben werden.



Bestimmen Sie eine Gleichung der Flugbahn (Koeffizienten sinnvoll runden).
Unter welchem Winkel trifft die Kugel auf dem Boden auf? (7 VP)

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad ; \quad x \in D.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f an.
Untersuchen Sie K auf Symmetrie, Asymptoten, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen und Extrempunkte.
Zeichnen Sie K samt Asymptoten für $-4 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm). (10 VP)

b) Das Schaubild K, die x-Achse sowie die Geraden $x = 2$ und $x = 4$ schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie mit der keplerschen Fassregel einen Näherungswert für den Flächeninhalt. (5 VP)

c) g_1 und g_2 sind zwei Parallelen zur x-Achse, die jeweils den Abstand a mit $a > 1$ zur x-Achse haben.
Das Schaubild K schneidet aus g_1 und g_2 zwei Strecken mit den Längen s_1 und s_2 aus.
Zeigen Sie, dass das Produkt $s_1 \cdot s_2$ unabhängig von a ist. (8 VP)

d) Eine gebrochenrationale Funktion h hat bei $x_1 = 0$ einen Pol ohne Vorzeichenwechsel und die Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$.
Ihr Schaubild C hat die waagrechte Asymptote $y = -2$.
Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf von C.
Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für h an. (7 VP)

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$f(x) = x + 1 + e^{1-x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf Extrempunkte, Wendepunkte und Asymptoten.
Zeichnen Sie K samt Asymptote für $-1 \le x \le 4$ (Längeneinheit 1 cm).
K schneidet die y-Achse im Punkt S.
In welchem Punkt schneidet die Tangente an K in S die x-Achse? (9 VP)

b) K begrenzt mit den Geraden $y = x + 1$, $x = z$ $(z > 0)$ und der y-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A(z).
Berechnen Sie A(z) und $A = \lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.
Bestimmen Sie z so, dass A(z) um 1% von A abweicht. (7 VP)

c) Die Gerade $x = u$ mit $u > 0$ schneidet K im Punkt P und die Gerade $y = x + 1$ im Punkt Q. Die Punkte Q, P und $R(0\,|\,1)$ bilden ein Dreieck.
Für welches u wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks extremal?
Bestimmen Sie Art und Wert des Extremums.
Ändert sich an den Ergebnissen dieser Extremwertaufgabe etwas, wenn der Punkt R durch einen anderen Punkt der y-Achse ersetzt wird?
Begründen Sie Ihre Antwort. (8 VP)

d) Die Funktion f gehört zur Funktionenschar f_t mit

$$f_t(x) = tx + 1 + e^{1-x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild K von f besitzt eine Asymptote und einen Tiefpunkt.
Für welche t besitzt das Schaubild K_t von f_t ebenfalls diese beiden Eigenschaften? (6 VP)

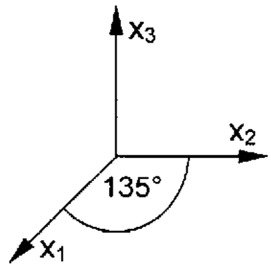
Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2001** | Grundkurs **Mathematik** | Aufgabe **B 1**

Haupttermin | **Analytische Geometrie**

Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|1)$, $B(-3|-3|4)$ und $C(3|-3|-2)$.

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E und die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von E mit den Koordinatenachsen.
Diese Schnittpunkte bilden ein Dreieck.
Zeichnen Sie dieses Dreieck in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$).
(Teilergebnis: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$) (7 VP)

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck $S_1S_2S_3$ gleichschenklig ist.
Dieses Dreieck bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(3{,}5|-3|3{,}5)$.
Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide. (8 VP)

c) Die Gerade g enthält die Punkte A und C.
Zeigen Sie, dass der Punkt $P(0|5|2)$ nicht auf g liegt.
Der Punkt P rotiert um die Achse g. Der dabei entstehende Kreis ist Grundkreis eines Kegels, dessen Spitze in A liegt.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Kegels. (8 VP)

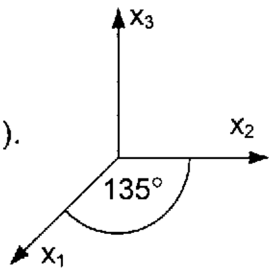
d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, deren Punkte von $U(1{,}5|2|-1)$ und $V(3{,}5|2|1)$ den gleichen Abstand haben.
Es gibt eine Gerade h, die in der Ebene E aus Teilaufgabe a) liegt und deren Punkte von U und V den gleichen Abstand haben.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h. (7 VP)

Durch die Eckpunkte

$O(0|0|0)$, $A_1(10|0|0)$, $B_1(10|6|0)$, $C_1(0|8|0)$,

$O_2(0|0|10)$, $A_2(10|0|11)$, $B_2(10|6|8)$, $C_2(0|8|6)$

ist ein Gebäude (Ausstellungspavillon) mit ebenen Seitenwänden gegeben, welches auf der x_1x_2-Ebene steht (Angaben in Meter).
O_2, A_2, B_2, C_2 sind die Eckpunkte seiner Dachfläche.



a) Zeichnen Sie das Gebäude in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$).
Zeigen Sie, dass die Eckpunkte der Dachfläche in einer Ebene E liegen.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von E.
In E liegt die gesamte Dachfläche. Falls die Dachneigung (Winkel zwischen E und der x_1x_2-Ebene) größer als 30° ist, muss ein Schneefanggitter angebracht werden.
Überprüfen Sie, ob dies der Fall ist.
(Teilergebnis: $E: x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 100 = 0$) (10 VP)

b) Es soll die Größe der Dachfläche bestimmt werden.
Untersuchen Sie hierzu die Lage gegenüberliegender Dachkanten.
Bestimmen Sie den Inhalt der Dachfläche. (10 VP)

c) Die trapezförmige Fläche $M_2M_3C_3C_2$ mit $M_2(5|7|7)$, $M_3(5|7|4)$ und $C_3(0|8|4)$ in der entsprechenden Außenwand ist verglast. Durch diese Glasfläche fällt paralleles Sonnenlicht ein, wobei zu einem bestimmten Zeitpunkt der Lichtstrahl durch die Ecke C_2 im Punkt $Q_2(2|0|2)$ der gegenüberliegenden Wand $A_1OO_2A_2$ auftrifft.
Bestimmen Sie den vom Sonnenlicht getroffenen Bereich dieser Wand und schraffieren Sie diesen. (10 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2001** | Grundkurs **Mathematik** | Aufgabe **B 3**

Haupttermin | **Analytische Geometrie**

Gegeben sind der Punkt $A(1|2|3)$, die Ebene

$E: 4x_1 - 12x_2 + 3x_3 + 11 = 0$ sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt A in E liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g mit E.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_1 an, die g und A enthält.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und E_1. (9 VP)

b) Durch den Punkt $B(15|-20|9)$ verläuft eine zu E parallele Ebene E_2.
Geben Sie eine Gleichung von E_2 an.
E und E_2 sind Tangentialebenen einer Kugel, welche E im Punkt A berührt.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Kugel. (6 VP)

c) Die Kugel K mit Mittelpunkt $M(5|-10|6)$ und Radius $r = 13$ wird von der Geraden g in den Punkten S_1 und S_2 geschnitten.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.
Die Strecke S_1S_2 ist der Durchmesser des Schnittkreises einer Ebene E_3 mit K.
Geben Sie eine Gleichung von E_3 an. (8 VP)

d) Die Gerade h geht durch die Punkte $C(-5|1|28)$ und $D(-9|4|26)$.
Der Mittelpunkt der Kugel K* mit dem Radius 12 bewegt sich auf der Geraden h.
Kollidiert K* bei dieser Bewegung mit der Kugel K aus Teilaufgabe c) ? (7 VP)

